KONKURS
„ZOSTAŃ EUKLIDESEM”

11 czerwca 2011

CZĘŚĆ I

Zadanie 1. (1pkt)
Liczba całkowita dodatnia jest liczbą *palindromiczną*, jeśli jej zapis dziesiętny czytany od początku i od końca jest taki sam (np. 7653567). Istnieje dokładnie:

a) 10 dwucyfrowych liczb palindromicznych
b) 90 trzycyfrowych liczb palindromicznych
c) 24 trzycyfrowe liczby palindromiczne podzielne przez 4

Zadanie 2. (1pkt)

Jeśli dla pewnej funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ równanie $f(x) = x$ ma dokładnie dwa rozwiązania, to funkcja f może być:

a) malejąca
b) stała
c) rosnąca

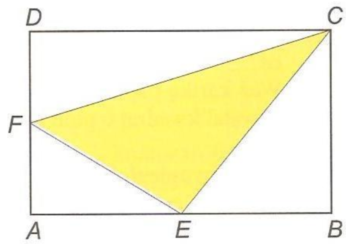
Zadanie 3. (1pkt)

Niech $a = \sqrt{2},\ b = \sqrt[3]{3},\ c = \sqrt[5]{5}$. Wtedy:

a) $a < b < c$
b) $c < b < a$
c) $c < a < b$

Zadanie 4. (1pkt)

Punkty E, F są odpowiednio środkami boków AB i AD. Stosunek pola zacieniowanego trójkąta CEF do pola prostokąta $ABCD$ wynosi:



a) 3 : 8

b) 2 : 3

c) 4 : 9

Zadanie 5. (1pkt)

Istnieją dwie różne liczby całkowite m i n postaci $3k+1$ takie, że 3 jest dzielnikiem liczby:

a) $(m+n)^3$

b) $m^3 - n^3$

c) $m^3 + n^3$

Zadanie 6. (1pkt)

Wykres funkcji $y = \frac{2x-1}{x+1}$ można otrzymać przesuwając wykres funkcji:

a) $y = \frac{1}{x+1}$

b) $y = \frac{1}{x}$

c) $y = \frac{-3}{x+1}$

Zadanie 7. (1pkt)

Za 3 paczki cebulek tulipanów (w każdej po 20 sztuk) zapłacono tyle złotych, ile sztuk takich cebulek można kupić za 15 zł. Paczka cebulek kosztuje:

a) 15 zł

b) 10 zł

c) 20 zł

Zadanie 8. (1pkt)

Wiadomo, że wielokąt ma parzystą liczbę przekątnych. Wtedy liczba jego boków jest równa:

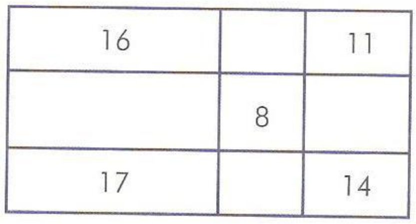
a) $4k+1$ lub $4k+3$, gdzie k jest liczbą naturalną

b) $4n$ lub $4n+3$, gdzie n jest liczbą naturalną dodatnią

c) $4k+1$ lub $4k+2$, gdzie k jest liczbą naturalną

Zadanie 9. (1pkt)

Duży prostokąt podzielono na 9 mniejszych prostokątów. Obwody pięciu z nich podano na rysunku. Wtedy:



a) obwód dużego prostokąta wynosi 38

b) taki prostokąt nie istnieje

c) obwód dużego prostokąta wynosi 36

Zadanie 10. (1pkt)

Dana jest nierówność $|x| < |x+1|$. Prawdą jest, że:

a) wszystkie rozwiązania tej nierówności są liczbami dodatnimi

b) każda dodatnia liczba rzeczywista spełnia tę nierówność

c) zbiór rozwiązań tej nierówności nie jest ograniczony z dołu

Zadanie 11. (1pkt)

Dwa tysiące jedenastą cyfrą w rozwinięciu dziesiętnym ułamka $\frac{2}{13}$ jest:

a) 1

b) 8

c) 5

Zadanie 12. (1pkt)

Jeśli długość boku trójkąta równobocznego zwiększymy o 2, to długość jego wysokości:

a) zwiększy się o 2

b) zwiększy się o $2\sqrt{3}$

c) zwiększy się o $\sqrt{3}$

Zadanie 13. (1pkt)

W okrąg o promieniu r wpisano prostokąt $ABCD$. Następnie połączono środki boków tego prostokąta, otrzymując czworokąt $EFGH$. Obwód czworokąta $EFGH$ jest równy:

a) $4\,r$

b) $3\sqrt{2}\,r$

c) $3\,r$

Zadanie 14. (1pkt)

Suma cyfr liczby $10^{92} - 92$ wynosi:

a) 818

b) 908

c) 728

Zadanie 15. (1pkt)

Jeśli $x + \frac{1}{x} = 5$, to $x^2 + \frac{1}{x^2}$ jest równe:

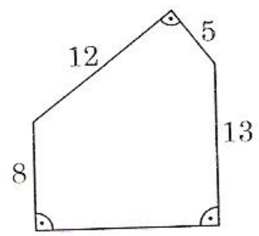
a) 26

b) 24

c) 23

Zadanie 16. (1pkt)

Działka ma kształt i wymiary (w metrach) tak, jak na rysunku.



Na ogrodzenie tej działki potrzeba:

a) $50\ m$ siatki

b) $48\ m$ siatki

c) $55\ m$ siatki

Zadanie 17. (1pkt)

Jeśli dla pewnej funkcji $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zbiorem rozwiązań nierówności $f(x) \leq 2$ jest $[0,2] \cup [3,5]$, to zbiorem rozwiązań nierówności $f(x) \leq 1$ może być:

a) $[1,4]$
b) $[0,2]$
c) $[0,2] \cup [3,6]$

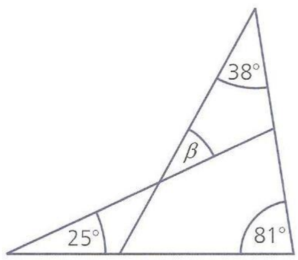
Zadanie 18. (1pkt)

Między cyfry liczby dwucyfrowej x wpisano pewną cyfrę. Otrzymana w ten sposób liczba trzycyfrowa jest dziesięć razy większa od liczby x. Wpisano cyfrę:

a) 0
b) 2 lub 4
c) nie da się tego jednoznacznie określić

Zadanie 19. (1pkt)

Wykorzystując dane z rysunku można stwierdzić, że miara kąta β jest równa:



a) $36°$
b) $40°$
c) $32°$

Zadanie 20. (1pkt)

O funkcji $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wiadomo, że dla pewnych różnych liczb dodatnich a, b zachodzą równości $f(a) = b$ i $f(b) = a$. Wobec tego funkcja f nie może być:

a) okresowa
b) rosnąca
c) parzysta

CZĘŚĆ II

Zadanie 1. (6 pkt.)

Adam, Bogdan i Cezary pracują jako architekt, bankier i lekarz (niekoniecznie w podanej kolejności). Najstarszy z nich zarabia najwięcej. Cezary zarabia 75% tego, co najstarszy, zaś bankier $\frac{2}{3}$ tego, co Cezary. Łącznie zarabiają 18 000 zł. Stosunek wieku tych trzech mężczyzn jest równy 2:3:4, a łącznie mają 108 lat. Pan, który jest najmłodszy, nie jest architektem i nie zarabia najmniej. Najstarszy z panów nie ma na imię Adam. Ile zarabia, ile ma lat i w jakim zawodzie pracuje każdy z mężczyzn?

Zadanie 2. (4 pkt.)

Od dwóch kawałków stopu o różnej zawartości procentowej miedzi ważących 10 kg (stop I) i 8 kg (stop II) odcięto jednakowe wagowo kawałki. Odcięty kawałek pierwszego stopu stopiono z resztą drugiego stopu, zaś odcięty kawałek drugiego stopu stopiono z resztą pierwszego. Okazało się wówczas, że zawartość procentowa miedzi w obu otrzymanych stopach jest jednakowa. Ile ważył każdy z odciętych kawałków?

Zadanie 3. (6 pkt.)

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, $a, b \geq 0$ zachodzi nierówność

$$\frac{a^3+b^9}{4} \geq 3ab^3 - 16\,.$$

Zadanie 4. (5 pkt.)

Niech $f(x) = \sqrt{x}$. Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste a spełniające równanie

$$f(4) + f\big(f(a^4)\big) + 16f\left(\frac{1}{a^2}\right) = \frac{1}{f(0{,}01)}.$$

Zadanie 5. (4 p.)

Wewnątrz dużego kwadratu umieszczono mały kwadrat (o bokach równoległych do boków dużego kwadratu). Udowodnij, że suma pól zacieniowanych trapezów jest równa sumie pól trapezów niezacieniowanych